

К ПРОБЛЕМЕ ВИЗУАЛИЗАЦИИ ПРОЦЕССОВ ДО ЛОКАЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ

Н. Н. Яковлев, Е. А. Лукашев¹

amntksoyuz@mail.ru, elukashov@yandex.ru

Е. В. Радкевич²

evrad07@gmail.com

Техническая физика

ВВЕДЕНИЕ(ПРОБЛЕМЫ ГОРЕНИЯ).

одной из наиболее важных проблем при конструировании прямоточных реактивных двигателей и форсажных камер является неустойчивость горения. С неустойчивостью или с колебаниями встречались почти во всех типах камер сгорания, в которых использовался непрерывный поток горючего газа, независимо от размера и формы камеры, вида горючего или окислителя, системы их подачи, типа или назначения камеры сгорания. Если колебания происходят в камерах сгорания, создающих тягу, тяга может увеличиваться или уменьшаться. При сильных колебаниях камера может разрушиться. В камерах сгорания, используемых для нагрева, колебания чаще уменьшают, чем увеличивают эффективность горения. При этом суммарный коэффициент теплопередачи обычно изменяется незначительно, однако колебания могут заметно повлиять на локальные коэффициенты теплопередачи. Трудность понимания колебаний при горении в большей степени возникает из-за большого числа возможных механизмов, которые могут вносить вклад в генерирование колебаний. Решение задачи о неустойчивости для одного случая может оказаться неудовлетворительным для другого из-за того, что механизмы обуславливающие колебания различны. Отмечается, что колебания при горении, как правило, нелинейные. Это подтверждается следующими наблюдениями:

¹Тураевское машиностроительное конструкторское бюро "Союз Лыткарино Московской обл.

²Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова

- 1) колебания при горении достигают определенной максимальной амплитуды (если камера не разрушилась);
- 2) высокоскоростные фотографии колеблющихся пламен демонстрируют нелинейные эффекты (периодические вспышки свечения, генерирование вихрей, детонационные волны);
- 3) наблюдаются периодические изменения амплитуды при колебаниях акустического типа;
- 4) при переходном режиме часто могут возникать колебания большой амплитуды.

Общим понятием в работах по неустойчивости горения служит понятие времени задержки воспламенения (задержка поджигания, время индукции). Это понятие включает два аспекта, которые обычно рассматриваются отдельно. Первый касается физических процессов - распыливание, прогрев и смешение компонентов топлив; эти процессы мало чувствительны к давлению, температуре или составу горючей смеси. Второй аспект относится к химическим свойствам топлива; эти свойства могут быть достаточно чувствительными к давлению, температуре и составу горючей смеси. Отмечается, что результаты многих исследований критических условий устойчивости в линейном приближении, показывают, что эти условия зависят от времени задержки воспламенения и его изменения с давлением. Патнэм А.А. [15] выделяет три типа колебаний в камерах сгорания: первый связан с неустойчивостью всей системы, второй - с акустической неустойчивостью, третий - с неустойчивостью переходного процесса.

1. Неустойчивость системы. Как отмечается, этот тип неустойчивости наиболее часто встречается в ракетных двигателях и называется "чиханием" и характеризуется колебаниями низкой частоты от 20 до 200 Гц. Амплитуда обычно составляет приблизительно одну четверть от среднего давления в камере сгорания, но иногда наблюдались колебания с вдвое большей амплитудой. В колебаниях этого типа участвует весь двигатель - камера сгорания, линии подачи топлива, емкость для хранения топлива и т.д. Длина волны колебаний в этом случае обычно больше по сравнению с размерами каждого элемента системы, поэтому их принято рассматривать как дискретные элементы системы. Например, камеру сгорания рассматривают как резонатор Гельмгольца или, если используется механическая

аналогия, как отдельную пружину. Считается, что для исследования этого типа неустойчивости можно использовать методы, используемые для исследования устойчивости сервомеханизмов.

2. Акустической неустойчивостью называют неустойчивое состояние, приводящее к колебаниям, частота которых связана с размером камеры сгорания и скоростью звука в продуктах сгорания. Камеры сгорания реактивных двигателей и форсажных камер рассматриваются в этом случае как цилиндрические объемы. Аксиальные колебания (движение газа вдоль оси камеры сгорания "вперед - назад") подобны колебаниям в органной трубе, при радиальных колебаниях газ "пульсирует" между осью камеры и стенками, при тангенциальных колебаниях газ колеблется вдоль периметра камеры. Возможны также комбинированные колебания. В сложных случаях система рассматривается как комбинация резонаторов Гельмгольца. Однако может оказаться, что в системе акустический характер колебаний имеет только один ее элемент. Для каждой моды могут быть колебания типа и стоячих, и бегущих волн. Для аксиальной моды бегущую волну можно рассматривать как импульс давления, движущийся от одного конца камеры к другому, отражающийся и распространяющийся назад. Наблюдалось, что импульс давления при распространении по направлению к соплу немного уменьшался по величине, а затем отражался и двигался назад. Вблизи конца камеры сгорания, где располагалась форсунка, импульс, как предполагалось, вызывал изменение скорости горения и при этом к импульсу добавлялась энергия. При отражении импульса от форсунки его интенсивность восстанавливалась. Для подавления или предотвращения этого типа колебаний направлены изменения конструкции, уменьшающие интенсивность отраженного импульса давления: увеличение диаметра горла сопла и уменьшение угла конфузора сопла. Для аксиальной моды, когда амплитуда импульса увеличивается, скорость звука для части импульса с высоким давлением возрастает. Поэтому область высокого давления может распространиться на оставшуюся часть камеры. При этом суммарная скорость импульса будет превышать обычную скорость звука. В результате частота этого вида колебаний увеличивается с увеличением амплитуды. Если распространяющаяся волна давления становится ударной или детонационной, то частота возрастает значительно. Для колебаний других мод (неаксиальных) эти выводы могут оказаться неверными. Например, для первой радиальной или тангенциальной моды в цилиндре в отсутствие периодического добавления теплоты форма волны с большой амплитудой отличается от синусоидальной волны симметричным образом, и поэтому волна не становится ударной, а частота в этом случае не возрастает. Считается, что в связи с этим в любой системе, за исключением аксиальной, изменения частоты нельзя объяснить непосредственно изменениями в скорости звука. Амплитуда

давления по длине системы изменяется периодическим образом и два последних максимума давления можно отнести к концам камеры сгорания. В бегущей волне давление и скорость совпадают по фазе (или сдвинуты по фазе на половину периода в зависимости от принятой системы отсчета), а в стоячей волне они сдвинуты на четверть периода. Предполагается, что в системе с горением волны не являются строго стоячими, поскольку подпитка колебаний энергией и потеря ими энергии не распределены равномерно по всей системе. Из этого следует вывод, что даже для стоячей волны большой амплитуды должны быть некоторые несбалансированные компоненты бегущей волны, которые доставляют добавляемую в систему энергию к местам, где она наиболее интенсивно расходуется. Отмечается, что подпитка колебаний энергией и потери энергии обычно приводят к тому, что колебания будут приближаться к одному или другому типу. Возможна также комбинация двух типов колебаний. Например, в пульсирующих реактивных двигателях с клапаном преобладают возмущения типа стоячих волн, а комбинации стоячих и распространяющихся волн являются возмущениями в реактивном двигателе непрерывного действия (без клапана). При увеличении размеров камеры сгорания преобладающими акустическими модами колебаний вместо аксиальной становятся радиальная и тангенциальная, но частоты при этом остаются приблизительно постоянными. У первой тангенциальной моды типа распространяющейся волны пик давления за один цикл колебаний один раз обходит стенку камеры сгорания, а скорость у стенки при этом совершает одно колебание в одном и одно в противоположных направлениях. Радиальные и тангенциальные колебания большой амплитуды вызывают "эрозию" форсунок и стенок камеры сгорания. Предполагается, что это связано с увеличением скорости теплопередачи. Эрозионное действие колебаний приводит к появлению на стенках камеры спиральной дорожки, которые по предположению могут быть отнесены к явлениям типа спиновой детонации или к взаимодействию распространяющейся волны и остатков струй от форсунок.

3. Неустойчивость переходного типа обусловлена периодическим восстановлением режима горения после возникновения в некотором месте камеры ненормального состава смеси или после частичного, или полного потухания пламени. Например, когда продукты сгорания, образующиеся при установлении предельного "полного" пламени, после движения вдоль камеры сгорания проходят через сопло, назад может пойти волна сжатия. Когда приходит к топливной форсунке (и форсункам, подающим окислитель), она может изменить режим распыла топлива таким образом, что при поступлении горючей смеси в зону горения процесс горения нарушится. После восстановления пламени полный цикл колебаний повторяется. Такие колебания характеризуются периодом переходного процесса, так как требу-

ется время для того, чтобы газ переместился вдоль камеры сгорания или для распространения пламени по камере или ее части. Это время значительно большей, чем время распространения акустических волн и, следовательно, период колебаний большей. Обычно частоты, связанные с неустойчивостью переходного типа, лежат в том же интервале, что и частоты возникающие при неустойчивости всей системы.

4. Источники энергии, поддерживающие колебания при горении. Подпитывать колебания энергией могут периодические пульсации скорости подачи топлива (или окислителя, или обоих вместе). Пульсации возникают из-за изменения давления в камере сгорания около системы подачи топлива. Эти пульсации могут поддерживать колебания любого типа. Механизм при этом следующий: периодическое изменение скорости подачи горючего или окислителя вызывает соответствующее изменение скорости тепловыделения. Если переменная составляющая скорости тепловыделения в камере сгорания согласуется по фазе в колебаниями давления, то к колебаниям добавляется энергия. Колебания затем передают энергию к местам ее расходования в других частях системы, также воздействуют на системы подачи топлива. Однако если в системе подачи предусмотрен большой перепад давления, изменение давления у форсунки мало влияет на скорость подачи топлива. В этом случае колебания, обусловленные этим механизмом, будут отсутствовать. Изменение площади поверхности фронта пламени также может приводить к периодической скорости тепловыделения. Возможны периодические изменения поверхности пламени из-за периодических изменений скорости течения за стабилизатором. В этом случае изменение поверхности может возникать из-за отклонения краев фронта пламени относительно его главной части при изменяющейся амплитуде звуковых колебаний в области пограничного слоя. Причиной изменения поверхности пламени может служить срыв вихрей вблизи фронта пламени. Считается, что резкого возбуждения колебаний можно ожидать, как только частота срыва вихрей окажется вблизи некоторой нечетной кратной величины основной акустической частоты, или, наоборот, акустическая частота окажется близкой к некоторой нечетной кратной величине частоты срыва вихрей. Если срыв вихрей зависит от акустических колебаний, тогда взаимодействие двух колебательных систем может дать колебания большой амплитуды. Другая причина - зависимость скорости тепловыделения от давления, обычно тепловыделение увеличивается с ростом давления. Поэтому изменение тепловыделения будет находиться приблизительно в фазе с изменением давления. В этом случае дополнительный подвод теплоты поддерживает колебания. Отмечается, что такой механизм характерен, прежде всего, для акустических колебаний. В этом акустическом случае ударная волна может полностью или в некоторой своей части переходить в детонационную

волну, в которой тепловыделение происходит очень быстро вместе с распространением пика высокого давления. Предполагается, что незатухающая детонационная волна может развиться и в случае распространяющейся тангенциальной волны, которая без подпитки теплотой в ударную волну не переходит. Периодические изменения скорости и давления могут также воздействовать на процесс распада жидкой пелены. Возникающие при этом изменения в скорости горения могут оказаться достаточно большими и будут поддерживать колебания. Отмечается, что такой механизм поддержания колебаний наблюдался в ракетных двигателях. отдельные струи топлива могут сталкиваться между собой создавать большие возмущения. В этом случае скорость тепловыделения может изменяться периодически и поддерживать колебания. Для инициирования такого процесса, как предполагается, необходим начальный импульс с большой амплитудой. Наблюдаются периодические явления, связанные с линиями подачи жидкого топлива. Механизм следующий: отдельная жидкая струя при движении распадается на капли с некоторым характерным размером. Если частота возникновения капель совпадает с некоторой из собственных частот камеры сгорания, тогда могут реализоваться условия для подпитки колебаний. Для высокоскоростных струй, струй, сталкивающихся между собой, для жидкой пелены распыла и т.п. капли имеют характерный размер и распределены по пространству с некоторой характерной длиной волны. Отмечается, что в некоторой критической области скоростей, давлений и других переменных система может "рыскать" между двумя различными режимами течения. Например, наблюдалось, что при некоторых условиях пелена, образуемая при столкновении струй, имеет тенденцию случайным образом изменять свой вид между двумя возможными состояниями. Эта критическая область характеризуется теми участками кривых параметров задачи, которые дают двужначную зависимость. Если каждому из возможных вариантов течения соответствует разная скорость тепловыделения, то это может способствовать возникновению и поддержанию колебаний. Режим периодической подпитки колебаний энергией может проявляться не только при воздействии на системы топливоподачи, но и на сам процесс горения.

ЯЧЕИСТАЯ СТРУКТУРА

Явление избирательной диффузии, прежде всего, связывают со спонтанной неустойчивостью фронта пламени. В связи с этим рассматривается зависимость скорости распространения пламени от формы пламени и поля течения [18], а также спонтанная неустойчивость пламен в стационарном потоке [19].

Маркштейн Дж.Г. в [19] рассматривает спонтанную неустойчивость в стационарном потоке. Он отмечает, что это явление было открыто случайно, к нему не было проявлено интереса, и оно воспринималось как лабораторный курьез. Впоследствии было показано, что для богатых смесей воздуха с бензолом, пентаном или гептаном "внутренний конус разделяется темными линиями на несколько похожих на лепестки сегментов, которые часто вращаются с большой скоростью вокруг вертикальной оси". Такая структура пламени первоначально получила название "многогранной", а затем "ячеистой". Было установлено, что размер ячейки пламени может характеризовать газовую смесь, а скорость вращения подвержена воздействию изменений состава и скорости потока. Ячеистая структура пламени может наблюдаться в широком диапазоне составов, однако на пределах воспламенения для многих горючих смесей эта структура, как отмечается, играет особую роль. Важным примером является случай бедного предела для водородо-воздушных смесей, смесей, в смесях с добавкой ингибитора, а также богатых пределов для паров углеводородов. Общая черта этих наблюдений: расширение диапазона составов, в котором обнаруживается ячеистая структура пламени, при распространении пламени вверх по сравнению с диапазоном составов при распространении пламени вниз. Одно из объяснений влияния положения пламени в пространстве (распространение вверх или вниз) на возникновение неустойчивости и, как следствие, формирование ячеистой структуры пламени основывается на влиянии ускорения. Предполагается, что воздействие ускорения на стационарное течение газа приводит к возникновению градиента давления. Так как скорость горения вблизи пределов распространения очень мала, то параметр ускорения может полагаться больше единицы ($\frac{g}{g_0}$ - число Фруда; $\frac{g}{g_0}$ - безразмерное ускорение, $\frac{g}{g_0}$ - критическое волновое число). В этом случае распространение пламени вниз устойчиво, а распространение вверх имеет широкую область неустойчивости. Считается, что избирательная диффузия реализуется в случае формирования ячеистой структуры пламени, и в связи с этим существует область составов, для которых распространение пламени вниз не может быть реализовано, тогда как для тех же составов распространение пламени вверх еще возможно. Это является результатом того, что избирательная диффузия сдвигает состав смеси в область, где горение возможно.

Предполагается, что для полного понимания всех аспектов неустойчивости необходим учет не только избирательной диффузии, но и учет влияния течения газа. При экспериментах с пламенами на пористом стеклянном фильтре также было установлено, что бедные смеси, содержащие водород, и богатые смеси различных углеводородов горят с образованием неизотропной структуры. Интерпретация этого факта следующая: избыток водорода уменьшает скорость горения бога-

тых углеводородных пламен и для того, чтобы вызывать неустойчивость он должен диффундировать к гребням волны. Большинство исследователей пытались объяснить возникновение ячеистых пламен избирательной диффузией. Сполдинг Д.В. и Бота Дж.П. (1954 г.), которые получили ячеистую структуру пламени на охлаждаемой пористой пластинке для богатых, стехиометрических и бедных пропано-воздушных смесей, кроме эффекта избирательной диффузии отмечали и влияние аэродинамики потока. Маркштейн Дж.Г. в дополнение к этому предложил еще один фактор неустойчивости: температура горелки становится выше в тех местах, где пламя ближе к ее поверхности, и из-за предварительного подогрева смеси может увеличиться скорость распространения пламени, что в свою очередь будет поддерживать неизотропную структуру пламени. В то же время этот эффект может быть нейтрализован гашением пламени на поверхности горелки. Из этого следует вывод, что неустойчивость пламени может определяться тонким балансом нескольких противоположных влияний. В исследованиях Маркштейна Дж.Г. (1951 - 1959 гг.) с использованием быстрой киносъемки было показано, что ячейки пламени находятся в непрерывном движении, в результате которого наблюдается рост крупных ячеек за счет мелких с последующим расщеплением самых крупных ячеек на две или несколько более мелких. Такой характер процесса горения приводит к необходимости статистического описания размеров ячеек и, соответственно, структуры пламени. Для богатых смесей различных углеводородов было установлено, что средний размер ячейки связан с молекулярной массой топлива эмпирическим соотношением. Размер ячейки связан также с изменением давления: в интервале от до для смесей n-бутана с воздухом и азотом выполняется соотношение. Предполагается, что зависимость размера ячейки от молекулярной массы углеводорода топлива проявляется через зависимость коэффициента диффузии от молекулярной массы или числа Льюиса. Поскольку на значение числа Льюиса давление не оказывает заметного влияния, предполагается изменение размера ячейки в зависимости от давления определяется изменениями тепловой длины. Этот вывод приводит к соотношению между скоростью распространения пламени и давлением, которое приближенно справедливо для некоторых топлив, но не подтверждается для бутано-воздушных смесей. Считается, что экспериментальные результаты по ячеистым пламенам подтверждают основные предположения о том, что неустойчивость пламен обусловлена газодинамическими и диффузионными факторами. Однако на этом согласие между теоретическими положениями и наблюдениями заканчивается, так как переход от ячеистой к гладкой структуре должен был быть следующим: размер ячейки должен возрастать вплоть до перехода пламени в устойчивое, когда критическая длина волны становится больше характерного размера устройства. На практике наблюдается другая картина: постепенно уменьшается глубина ячеек пламени, его

структура становится все менее выраженной, а размер ячеек меняется незначительно. Таким образом, переход от неустойчивого горения к устойчивому сопровождается не увеличением длины волны (уменьшением частоты) при постоянной амплитуде, а, наоборот, уменьшением амплитуды периодической структуры при постоянной длине волны.

На качественном уровне роль избирательной диффузии подтверждают и другие исследованные системы, которые по характеру формирующихся пламен отличаются от "чисто"углеводородных. Отмечается, что для пламен метана с воздухом и азотом крупные неглубокие ячейки образуются в бедных смесях и не образуются в богатых. Для системы *n*-бутан - метан наблюдалось следующее поведение: добавки метана в достаточном количестве подавляют формирование ячеистого пламени для богатых составов. Другая система углеводород с добавкой водорода демонстрирует следующее поведение: добавка водорода ко всем углеводородам дает ячейки в бедных смесях и подавляет их образование в богатых. Отмечается, необычное поведение в системе : добавка малых количеств бутана в богатые пламена монооксида углерода вызывает образование ячеистой структуры, которая почти в точности совпадает со структурой пламени одного бутана. Предполагается, что в этой системе углеводород действует как ингибитор (этот вопрос подробно рассмотрен у Щетинкова Е.С. [20]), аналогично действию в системе , изученной Зельдовичем Я.Б. и Дроздовым И.П. (1943 г.).

ПРОБЛЕМЫ ВИБРАЦИОННОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ,

Математическое исследование колеблющейся системы обычно основывается на предположении, что амплитуда колебаний мала, так как уравнения обычно линеаризуются, то различные механизмы, основанные на таких исследованиях, могут служить только ориентирами при изучении неустойчивости горения. Поэтому результаты теоретического исследования следует использовать с оговорками.

Хорошо известно, что состояния до локального равновесия прежде всего характеризуются самовозбуждающимися режимами (пример коагуляции, начальной стадии кристаллизации сплавов [7]). В этой статье, на примере начальной стадии уплотнения в гиперзвуковом потоке для двухкомпонентной системы Эйлера мы приведем визуализацию самовозбуждающихся режимов на основе нетрадиционной регуляризации системы уравнений Эйлера с использованием вязкости и введения отрицательной диффузии.

Для этих целей мы прежде всего в двухкомпонентной системе Эйлера

$$\begin{aligned}
\partial_t \varrho_1 + \partial_x(\varrho_1 u_1) &= 0, \\
\partial_t \varrho_2 + \partial_x(\varrho_2 u_2) &= 0 \\
\partial_t(\varrho_1 u_1) + \partial_x\left(\varrho_1 u_1^2 + P(\varrho_1, \varrho_2)\right) &= 0, \\
\partial_t(\varrho_2 u_2) + \partial_x\left(\varrho_2 u_2^2 + P(\varrho_1, \varrho_2)\right) &= 0
\end{aligned} \tag{1}$$

где ϱ_1, ϱ_2 и u_1, u_2 соответственно плотности и скорости компонент, $P(\varrho_1, \varrho_2)$ — давление, перейдем к новым переменным: концентрации $c = \varrho_2/\varrho$ активной компоненты, суммарной плотности $\varrho = \varrho_1 + \varrho_2$, и скоростям $U = (1 - c)u_1 + cu_2$, $U_1 = \kappa(c)u_1 + (1 - \kappa(c))u_2$, компонент. Здесь, по аналогии с кристаллизацией [7], $\kappa(c) = \left(1 - \beta e^{-\frac{c}{1-c}}\right)^{-1}$ — присоединенная масса пассивной компоненты с концентрацией $(1 - c) = \varrho_1/\varrho$, $0 < \beta < 1$. Понятие присоединенной массы вводится из следующего принципа. Мы рассматриваем двухкомпонентную среду, когда одна компонента на уровне комплексов вступают в какое то нелокальное взаимодействие со второй компонентой, локально неустойчивое, спонтанное и находящееся в динамическом равновесии. Что означает присоединенная масса. Если скорость первой компоненты больше скорости второй, при взаимодействии первая компонента притормаживает уплотняясь, если ее меньше скорости второй компоненты, то разгоняется, становясь более разряженным. Присоединенная масса возникает только при взаимодействии, в зоне лобильности второй (активной) компоненты.

В переменных c, ϱ, U, U_1 система (1) записывается в виде системы

$$\begin{aligned}
&\varrho \left(\partial_t c + U \partial_x c + \partial_x (h(c)(U - U_1)) + \right. \\
&\quad \left. + h(c)(U - U_1) \partial_x (\ln(\varrho)) \right) = 0, \\
&\partial_t \varrho + \partial_x(\varrho U) = 0, \\
&\partial_t(\varrho U) + \partial_x\left(\varrho U^2 + 2P(\varrho_1, \varrho_2)\right) = -\partial_x\left(c(1 - c) \frac{(U - U_1)^2}{(1 - c - \kappa(c))^2}\right), \\
&\partial_t((1 - c)\varrho U_1) + \partial_x\left((1 - c)\varrho U_1^2 + P(\varrho_1, \varrho_2)\right) \\
&= -\partial_x\left(2h_1 \varrho U(U - U_1)\right) - \partial_t(h_1 \varrho(U - U_1)) - \\
&\quad -\partial_x\left((1 - c)\varrho [2\kappa(c)(1 - \kappa(c)) + (1 - \kappa(c))^2] \frac{(U - U_1)^2}{(1 - c - \kappa(c))^2}\right)
\end{aligned} \tag{2}$$

которую в дальнейшем будем называть приведенной системой Эйлера. При предположениях, что $U > 0$, $\partial_\varrho P = P'_\varrho > 0$ и либо

1) давление P в переменных c, ϱ не зависит от концентрации,

2) в случае зависимости давления P от концентрации

$$M \gg 1, \quad \mu W\left(\mu, \frac{P'_c}{P'_\varrho}, M\right) = o(1), \quad (3)$$

где число Маха $M = U/c_s$, $c_s = \sqrt{P'_\varrho}$ — скорость звука, малый параметр $\mu = (U - U_1)/U$ и функция $W(\mu, \frac{P'_c}{P'_\varrho}, M)$ полиномиальная по своим переменным, квадратичная по M , такая замена корректна, поскольку сохраняет строгую гиперболичность.

К приведенной системе Эйлера мы применим нестандартную регуляризацию вязкостью в уравнениях для импульса (третье и четвертое уравнения) и введением отрицательной диффузии в уравнение для концентрации, используя уравнение Кана-Хилларда:

$$\begin{aligned} & \partial_t c + U \partial_x c + \partial_x (h(c)(U - U_1)) + \\ & + h(c)(U - U_1) \partial_x (\ln(\varrho)) = \partial_x \left(\frac{D}{P} \partial_x \left(\Phi\left(c, \frac{P}{k\varrho}\right) - \varepsilon^2 \partial_x^2 c \right) \right), \\ & \partial_t \varrho + \partial_x (\varrho U) = 0, \\ & \partial_t (\varrho U) + \partial_x \left(\varrho U^2 + 2P(\varrho_1, \varrho_2) \right) = \varepsilon \partial_x^2 U - \partial_x \left(c(1 - c) \frac{(U - U_1)^2}{(1 - c - \kappa(c))^2} \right), \\ & \partial_t ((1 - c)\varrho U_1) + \partial_x \left((1 - c)\varrho U_1^2 + P(\varrho_1, \varrho_2) \right) \\ & = \varepsilon \partial_x^2 U_1 - \partial_x \left(2h_1 \varrho U (U - U_1) \right) - \partial_t (h_1 \varrho (U - U_1)) - \\ & - \partial_x \left((1 - c)\varrho [2\kappa(c)(1 - \kappa(c)) + (1 - \kappa(c))^2] \frac{(U - U_1)^2}{(1 - c - \kappa(c))^2} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

где $\Phi(c, T) = \begin{cases} (c - c^-)(c - c_{cr})(c^+), & T \leq T_0 \\ (c - c_{cr})^3, & T \geq T_0 \end{cases}$ где c^\pm, c_{cr} являются функциями от температуры T , которые мы опишем ниже $T_{min} \leq T \leq T_{max}$. Определим три значения концентрации: c_{min} , которое фактически будет представлять собой $c(T_{min})$; c_{mid} , которое фактически будет представлять собой $c_{cr}(T_{min})$; и некоторое значение c_0 , которое мы в данном расчете возьмем равным c_{mid} . Теперь определим функции $c^\pm(T)$ как корни уравнения $T = \alpha_{clust} c^2 + \beta_{clust} c + \gamma_{clust}$, где

$$\alpha_{clust} = \frac{T_{min} - T_0}{(c_{min} - c_0)^2}, \quad \beta_{clust} = -2\alpha_{clust} c_0, \quad \gamma_{clust} = T_0 + \alpha_{clust} c_0^2.$$

Функцию $c_{cr}(T)$ определим линейным образом. Постоянные $T_0, T_{min}, T_{max}, c_{min}; c_{mid}$ выбираются из эксперимента (см. например [7]). Здесь постоянная k — константа Больцмана, ε — малый параметр сглаживания.

Для регуляризации (4), в приведенных выше предположениях, численно построены самовозбуждающиеся решения задачи Римана. Анализ численных экспериментов мы приведем ниже. Такие самовозбуждающиеся решения, описывающие процессы до локального равновесия, можно назвать вибрационными. Система (4) является регуляризацией системы (2) в смысле нестандартного определения слабого решения (см. [6], [5], [4]). Хорошо известно, что даже в случае гладких (а тем более, разрывных) начальных данных $U^0(x)$, вообще говоря, не существует гладкого глобального по времени решения системы

$$\begin{aligned} \partial_t U + \partial_x(F(U)) &= 0, \quad (x, t) \in R \times (0, \infty), \\ U|_{t=0} &= U^0, \quad (x, 0) \in R \times t = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где $F : R^m \rightarrow R^m$ и $U^0(x) : R \rightarrow R^m$ — заданные гладкие вектор-функции и $U = U(x, t) = (u_1(x, t), \dots, u_m(x, t))$, $x \in R, t > 0$. Здесь F — функция потока, связанная с системой уравнений (5). В настоящее время математическая теория для общей задачи (5) далека от завершения. Как сказано в книге Л. К. Эванса [3]: ”самая большая трудность при изучении таких систем — это найти подходящее понятие слабого решения для начальной задачи (1.1)” ; ”... резонно постараться разработать подход, при котором функция меньшей гладкости ”решала” бы эту начальную задачу в каком-либо смысле” . И важно понять, как эти ”подходящее понятие слабого решения” связаны с физикой, т.е. как это связано с математическим моделированием процессов. Нестандартность определения слабого решения для приведенной системы Эйлера связана с тем, что первое уравнение умножаем на тестовую функцию $c(x, t) \varphi(x, t)$, где $\varphi(x, t) \in C_0^\infty(R^2)$ — бесконечно дифференцируемая функция в R^2 , с компактным носителем, в то время как два уравнения для импульса стандартно умножаем на тестовые функции $\psi_1(x, t), \psi_2(x, t) \in C_0^\infty(R^2)$ соответственно. Тогда нетрудно показать, что для решения задачи Римана интеграл

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{D}{\frac{P}{k\rho}} \partial_x \left(\Phi(c, \frac{P}{k\rho}) - \varepsilon \partial_x^2 c \right) \partial_x (c\varphi) dx dt = O(\sqrt{\varepsilon})$$

Таким образом, введение отрицательной диффузии в уравнение для концентрации посредством уравнения Кана-Хилларда совместно с введением вязкости в уравнения для импульса является регуляризацией приведенной системы Эйлера в силу нестандартного определения слабого решения, приведенного выше.

По аналогии с [7], [8], исследование приведенной системы началось с ее простейшей подсистемы

$$\begin{aligned}
\partial_t c + U \partial_x c &= \partial_x \left(\frac{D}{k \varrho} \partial_x \left(\Phi(c, \frac{P}{k \varrho}) - \varepsilon^2 \partial_x^2 c \right) \right), \\
\partial_t \varrho + \partial_x (\varrho U) &= 0, \\
\partial_t (\varrho U) + \partial_x \left(\varrho U^2 + 2P(\varrho_1, \varrho_2) \right) &= \varepsilon \partial_x^2 U, \\
\partial_t ((1-c)\varrho U_1) + \partial_x \left((1-c)\varrho U_1^2 + P(\varrho_1, \varrho_2) \right) &= \varepsilon \partial_x^2 U_1
\end{aligned} \tag{6}$$

т.е. регуляризации усеченной системы Эйлера и уравнения переноса для концентрации. Чем интересна подсистема (6)? Как было показано Ю.Г. Рыковым, В. Лосевым и О. Феодоритовой (ИПМ им. Келдыша) усечение системы Эйлера

$$\begin{aligned}
\partial_t \varrho + \partial_x (\varrho U) &= 0, \\
\partial_t (\varrho U) + \partial_x \left(\varrho U^2 + 2P(c, \varrho) \right) &= 0, \\
\partial_t ((1-c)\varrho U_1) + \partial_x \left((1-c)\varrho U_1^2 + P(c, \varrho) \right) &= 0,
\end{aligned} \tag{7}$$

при любом фиксированном c при специальном подборе начальных данных дает неклассические решения задачи Римана, с бифуркацией фронта ударной волны компоненты U_1 в так называемый "горбатый" кинк с двумя фронтами. При этом, для переднего фронта выполнено условие Гюгонио, в то время как для заднего фронта уравнение для скорости имеет другой характер. В фазовой плоскости переменных (ϱ, U, U_1) выделяется множество точек, не достижимых цепочками устойчивых ударных волн и волн разряжения. Вход в это множество приводит к появлению описанной выше бифуркации фронта ударной волны компоненты U_1 . В дальнейшее множество недостижимых точек будем называть зоной неклассичности.

АНАЛИЗ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА Этот артефакт позволил получить для регуляризации подсистемы (6) вязкостью, с введением отрицательной диффузии через уравнение Кана-Хилларда для концентрации самовозбуждающиеся решения задачи Римана. Приведем результаты численного эксперимента Ю.Г.Рыкова, В. Лосева и О. Феодоритовой (ИПМ им. Келдыша). Начальная постоянная концентрация $c|_{t=0} = c_{cr}$ берется из зоны лобильности активной компоненты (в численном эксперименте $c_{mid} = 0.43$, $c_{min} = 0,04$). Такая концентрация включает механизм (Рис. а) бифуркации фронта ударной волны (Рис. б) для U_1 :

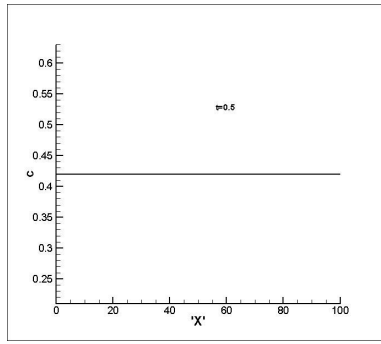


Рис.а1

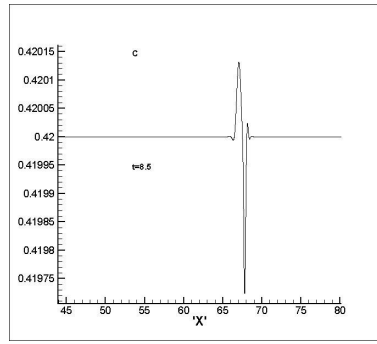


Рис.б1

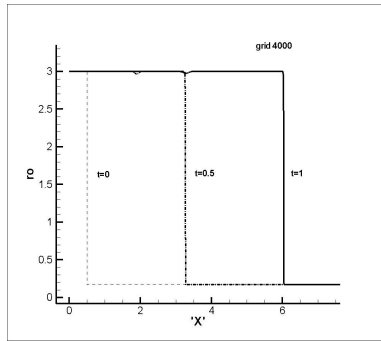


Рис.а2

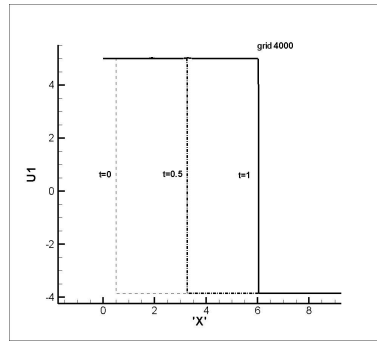


Рис.б2

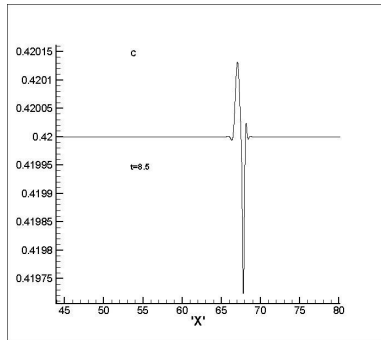


Рис.а

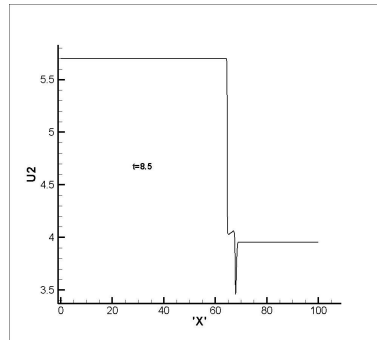


Рис.б

Возникший промежуток между передним и задним фронтами ударной волны для U_1 заполняется осцилляциями самовозбудившегося решения.

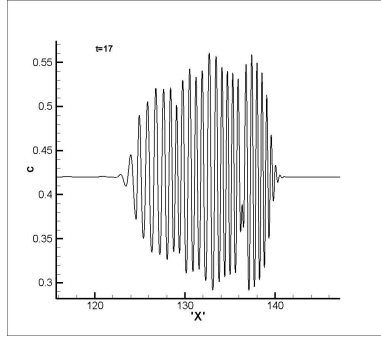


Рис.с

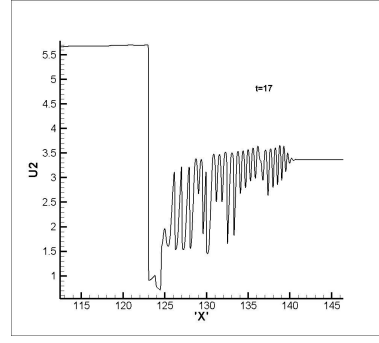


Рис.d

ВЫВОДЫ.

1) Для регуляризации полной приведенной системы (4) справедлив тот же результат, с тем же характером поведения самовозбуждающихся решений задачи Римана. Таким образом, мы получили новый класс, невязких в обычном смысле решений системы Эйлера. Интересная задача-получить их двухмасштабное описание теории усреднений. Для полной системы (4) численный эксперимент проведен О.А. Васильева(МГУ им. Ломоносова).

2) Дисперсионное уравнение приведенной системы

$$X \left[(X^2 - 2) \left(X + \frac{ch_1}{1-c} M \right) - \frac{2hh_1}{1-c} M \frac{P'_c}{P'_\varrho} + \right. \\ \left. + \frac{h(2c-1-4h_1)}{(1-c)} \frac{P'_c}{P'_\varrho} X \right] + \mu W \left(\mu, \frac{P'_c}{P'_\varrho}, M, X \right) = 0 \quad (8)$$

в переменной $X = (\lambda + U)/c_s$, c_s – скорость звука, функция $g(c) = 2c - 1 - 4h_1(c)$ монотонна, меняет знак, $g(0) = -5$, $g(1) = 1$. Отсюда следуют приведенные выше условия строгой гиперболичности приведенной системы.

3) Предложенная регуляризация позволяет получить самовозбуждающиеся решения по своему характеру визуализирующие реальные процессы в гиперзвуковом потоке, как например так называемый unstart(незажигание) в прямооточных ЖРД(см. [9]):

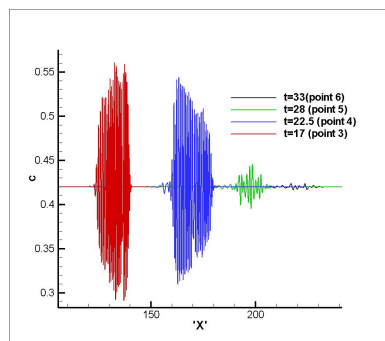


Рис.е

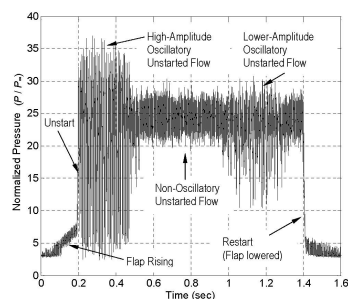


Рис.ф

Слева характерное поведение второй скорости регуляризации (4). Длительность осцилляций регулируются входом в неклассическую зону и выхода из нее и могут управляться граничными значениями слева для смешанной задачи Римана. Справа характерное давление unstart [9]. Это может указывать на то, что процесс unstart может быть вызван не только запирающим давлением, но возникновением неоднородностей в гиперзвуковом потоке другой природы.

4) Бесспорно, что ситуация общая. Интересно исследовать трехкомпонентную систему уравнений Эйлера с двумя активными компонентами, находящихся во взаимодействии типа "жертва-хищник". Это позволит ответить на некоторые вопросы связанные с проблемой перемешивания при горении прямоточных ЖРД.

Список литературы

- [1] J. Glimm, *YSolutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations*, *Comm. Pure Appl. Math.*, 18:4 (1965), 697Ц715.
- [2] P. D. Lax, *Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves*, *CBMS-NSF Regional Conf. Ser. Appl. Math.*, 11, SIAM, Philadelphia, PA, 1973.
- [3] Л. К. Эванс, *Уравнения с частными производными*, Университетская серия, 7, Тамара Рожковская, Новосибирск, 1998; пер. с англ.: L. C. Evans, *Partial differential equations*, *Grad. Stud. Math.*, 19, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
- [4] Э. Митидьери, С.И. Похожаев, *Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных*, Москва, МАИК "НАУКА/ИНТЕРПЕРИОДИКА"(2001)
- [5] Danilov V. G., Omel'yanov G. A., and Radkevich E. V., *Hugoniot-type conditions and weak solutions to the phase field system*// *Eur. J. Appl. Math.* v.10(1999), pp 55–77.
- [6] В. М. Шелкович, *Сингулярные решения систем законов сохранения типа δ и δ' ударных волн и процессы переноса и концентрации* УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК, 2008 г. май Ч июнь т. 63, вып. 3 (381)

- [7] Яковлев Н.Н., Лукашев Е.А., Радкевич Е.В. Проблемы реконструкции процесса направленной кристаллизации. // ДАН РФ, 2008. - т. 421, N 5. - С. 625 - 629.
- [8] Н. Н. Яковлев, Е. А. Лукашев, Е. В. Радкевич, ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА НАПРАВЛЕННОЙ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ МЕТОДОМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ РЕКОНСТРУКЦИИ// Доклады РАН, , 2012, том 445, No 4, с. 1Ц4
- [9] J. L. Wagner, Experimental Studies of Unstart Dynamics in Inlet / Isolator Configurations in a Mach 5 Flow, Dissertation Presented to the Faculty of the Graduate School of The University of Texas at Austin(2011)
17. Маркштейн Дж.Г. Теория распространения пламени. // Нестационарное распространение пламени. / Под ред. Дж. Г. Маркштейна. М.: Мир, 1968, С. 13 - 25.
18. Маркштейн Дж.Г. Исследование устойчивости плоского фронта пламени и его реакции на внешние воздействия методом малых возмущений. // Нестационарное распространение пламени. / Под ред. Дж. Г. Маркштейна. М.: Мир, 1968, С. 26 - 102.
19. Маркштейн Дж.Г. Теория распространения пламени. // Нестационарное распространение пламени. / Под ред. Дж. Г. Маркштейна. М.: Мир, 1968, С. 103 - 139.
20. Щетинков Е.С. Физика горения газов. М.: Наука, 1965, 740 с.